Version 10.6.2007 April 2007

MIIA – Differentialrechnung mehrerer reeller Veränderlicher – SoSe 2007

Kurzfassung

Martin Schottenloher

$\infty\,\infty\,\infty$

In dieser zweiten Grundvorlesung zur Analysis werden Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ untersucht, die auf einer Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ definiert sind oder auf einem allgemeineren Raum X. Es ist sinnvoll auch vektorwertige Funktionen $f : X \to E$ mit in die Untersuchungen einzubeziehen, z.B. für $\mathbb{R}^m$ oder allgemeinere normierte Räume E.

Es geht wieder darum, das Verhalten der Funktionen bei kleinen Veränderungen der Argumente zu analysieren. Dazu ist es nötig, eine klare Begriffsbildung davon zu haben, was in diesem Zusammenhang „kleine Änderung“ bedeutet. Diese Klärung wird durch die natürliche Topologie des $\mathbb{R}^n$ geleistet.

Es gilt also erst einmal, die topologischen Grundbegriffe zusammenzustellen, die für den $\mathbb{R}^n$ benötigt werden. Damit ist dann der Begriff der stetigen Funktion erklärt, und es lässt sich der Begriff der Differenzierbarkeit für Funktionen in mehreren Veränderlichen einführen und studieren. Mit dem Konzept der Differenzierbarkeit ist es möglich, einige fundamentale Aussagen wie zum Beispiel Resultate Kurvenlänge und Kurvenintegrale, über Extrema von Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ oder den Satz über die Umkehrabbildung von differenzierbaren Abbildungen zu beweisen.

Auf dem Weg dahin vertiefen wir für vektorwertige Funktionen $f : J \to E$ auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ mit Werten in einem Banachraum die Differential- und Integralrechnung einer reellen Veränderlichen und begründen insbesondere die Integrationstheorie von solchen Funktionen.

Kapitel VIII. Topologie metrischer Räume

In diesem Kapitel geht es darum, die topologischen Grundbegriffe bereitzustellen, die wir für topologische Überlegungen über Teilmengen X des $\mathbb{R}^n$ mit seiner natürlichen topologischen Struktur und für Funktionen $f : X \to \mathbb{R}^n$ benötigen. Um dieser Aufgabe gerecht zu werden, holen wir aus und beginnen mit den abstrakten Konzept des topologischen Raumes (§ 22), studieren dann metrische Topologien und normierte Räume, und kommen später zum Konzept der kompakten Menge und des zusammenhängenden Raumes.

Dieser Weg, bei dem mehr dargestellt wird, als für den $\mathbb{R}^n$ nötig wäre, hat seine Berechtigung, weil die topologischen Grundbegriffe überall in der Mathematik verwendet werden und weil auf diese Weise die topologischen Konzepte, die für Teilmengen $X \subset \mathbb{R}^n$ gebraucht werden, in einen allgemeineren Zusammenhang gesetzt und eingeordnet werden können.

§22 Der Begriff des topologischen Raumes

(22.1) Definition: Ein *topologischer Raum* besteht aus einer Menge X und einem System $\mathcal{T}_X$ von Teilmengen von X mit den folgenden Eigenschaften:

T.1 Für je zwei Elemente $U \in \mathcal{T}_X$ und $V \in \mathcal{T}_X$ gilt $U \cap V \in \mathcal{T}_X$, und es gilt $X \in \mathcal{T}_X$.

T.2 Für jede Familie $(U_\iota)_{\iota \in I}$ von Elementen $U_\iota \in \mathcal{T}_X$ gilt $\bigcup_{\iota \in I} U_\iota \in \mathcal{T}_X$.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ heißt *stetig*, wenn für alle $V \in \mathcal{T}_Y$ stets $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ gilt.

Man beachte $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$, f^{-1} ist hier nicht die Umkehrabbildung von f, die ja in der Regel gar nicht existiert.

Das Mengensystem $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X$ heißt dann „die Topologie von X“, oder die „Topologie des (topologischen) Raumes X“, und man spricht von einer „topologischen Struktur“ auf der Menge X, die durch $\mathcal{T}$ gegeben ist.

(22.2) Bemerkungen und Beispiele:

1° Die Teilmengen $U \in \mathcal{T}_X$ eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T}_X)$ heißen die *offenen Mengen* des topologischen Raumes. Eine Teilmenge $U \subset X$ ist also genau dann offen, wenn $U \in \mathcal{T}_X$ gilt.

2° Aus T.1 folgt durch Induktion die Eigenschaft: Für endlich viele Elemente $U_1, U_2, \ldots, U_n$ aus $\mathcal{T}$ ist der Durchschnitt $\bigcap_{\iota=1}^{n} U_\iota$ ebenfalls ein Element aus $\mathcal{T}$.

3° Die Definition beinhaltet, dass neben der ganzen Menge X auch die leere Menge $\emptyset$ offen ist: $\emptyset \in \mathcal{T}_X$. Denn in T.2 ist die leere Vereinigung zugelassen, und es ist $\bigcup_{\iota \in \emptyset} U_\iota = \emptyset \in \mathcal{T}_X$. Die Axiome T.1 und T.2 besagen dann genau, dass das System $\mathcal{T}_X$ der offenen Mengen abgeschlossen ist gegenüber endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen.

4° Das zentrale Beispiel, das die Verbindung zwischen den Methoden der Kapitel III – VII und dem jetzt eingeführten neuen Zugang herstellt:

Im Falle $X = \mathbb{R}$ erklären wir die *natürliche Topologie* oder auch die *euklidische Topologie* auf $\mathbb{R}$ dadurch, dass eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ als offen definiert wird, wenn es zu jedem $x \in U$ ein $r > 0$ gibt, so dass $]x - r, x + r[\subset U$ gilt. Wir sehen dann, dass das System

$$\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall\, x \in U\, \exists\, r > 0 :]x - r, x + r[\subset U\}$$

der so definierten offenen Mengen die Axiome T.1 und T.2 erfüllt und dass sämtliche Intervalle der Form $]a, b[$ zum System der offenen Mengen gehören. Der bisherige Sprachgebrauch passt also mit dem neu eingeführten Begriff der offenen Menge in $\mathbb{R}$ zusammen. Im übrigen gilt auch: $\mathcal{T} = \{U \subset X \mid \exists\, a_\iota, b_\iota \in \mathbb{R}\ (\iota \in I) : U = \bigcup_{\iota \in I}]a_\iota, b_\iota[\}$.

Die natürliche Topologie des $\mathbb{R}$ hat einerseits eine Verallgemeinerung auf beliebige total geordnete Mengen als „Ordnungstopologie“ und andererseits eine Verallgemeinerung auf metrische Topologien, die auf einem normierten Raum durch die Norm gegeben sind. Der Ansatz der Ordnungstopologie wird in dieser Vorlesung nicht weiter verfolgt, während wir metrische Räume im nächsten Paragraphen studieren.

5° Vergleich des Stetigkeitsbegriffs aus Kapitel V, § 13, und dem neuen Stetigkeitsbegriff nach 22.1:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine im Sinne von Kapitel V stetige Funktion. Wir wollen zeigen, dass dann das Urbild $f^{-1}(V)$ einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}$ wieder offen ist. Dazu sei $x \in f^{-1}(V)$. Weil V offen ist, gibt es zu $f(x) \in V$ ein $\varepsilon > 0$ mit $]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[\subset V$. Wegen der Stetigkeit gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(]x - \delta, x + \delta[) \subset]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[\subset V$ (vgl. 13.8). Also gilt $]x - \delta, x + \delta[\subset f^{-1}(V)$, und daher ist $f^{-1}(V)$ offen.

Sei umgekehrt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die im Sinne von 22.1 stetig ist. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ und jedem $\varepsilon > 0$ ist das Intervall $U_\varepsilon(y) \subset \mathbb{R}\,,\ y = f(x),$ offen nach Definition 3°, also ist nach Voraussetzung $f^{-1}(U_\varepsilon(y)) \subset \mathbb{R}$ offen. Das bedeutet, dass es zu unserem Ausgangspunkt $x \in f^{-1}(U_\varepsilon(y))$ ein $\delta > 0$ mit $]x - \delta, x + \delta[\subset f^{-1}(U_\varepsilon(y))$ gibt. Für alle $x' \in \mathbb{R}$ mit $|x - x'| < \delta$ gilt daher $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, d.h. f ist in x stetig im Sinne von Kapitel V.

6° Im Falle $X = \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ verfahren wir ganz analog zu 3° und sehen auch die Chance einer Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^n$: $U \subset \mathbb{C}$ sei definitionsgemäß *offen*, genau dann wenn es zu jedem $z \in U$ ein $r > 0$ mit $U_r(z) \subset U$ gibt ($U_r(z) = z + r\mathbb{E} = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$, vgl. 10.4). Es gilt wieder: Das System $\mathcal{T}$ der so definierten offenen Mengen erfüllt T.1 und T.2, und die Kreisscheiben $U_r(z)$ sind offen. Diese Topologie heißt wieder die *natürliche Topologie* oder die *euklidische Topologie*.

(22.3) Weitere Beispiele und Bemerkungen: Sei X eine beliebigen Menge.

1° X und $\emptyset$ gehören zu jeder Topologie auf X. Mit diesen beiden Mengen wird schon eine Topologie definiert: Das System $\mathcal{T}_g := \{\emptyset, X\}$ ist eine Topologie auf X, die *gröbste Topologie* auf X. Diese Topologie heißt auch die *triviale* Topologie auf X.

2° Auf Menge X gibt es außerdem die *feinste Topologie*, das ist die Potenzmenge $\mathcal{T}_f := \mathcal{P}(X) = \{U \,|\, U \subset X\}$. Diese Topologie heißt auch die *diskrete* Topologie auf X.

3° Sei $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum. Bezüglich der feinsten Topologie auf X ist dann jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig, bezüglich der gröbsten Topologie auf X sind dagegen in der Regel nur die konstanten Abbildungen stetig.

4° Die Menge $\tau(X)$ aller Topologien auf X ist partiell angeordnet durch

$$\mathcal{T} \le \mathcal{S} \;:\Longleftrightarrow\; \mathcal{T} \subset \mathcal{S}$$

für $\mathcal{T}\,,\, \mathcal{S} \in \tau(X)$. Die Topologie $\mathcal{T}_g = \{\emptyset, X\}$ ist in dieser partiellen Anordnung das kleinste Element im Sinne von $\{\emptyset, X\} \le \mathcal{T}$ für alle $\mathcal{T} \in \tau(X)$ und $\mathcal{T}_f = \mathcal{P}(X)$ ist das größte Element im Sinne von $\mathcal{T} \le \mathcal{P}(X)$ für alle $\mathcal{T} \in \tau(X)$. Es gilt $\mathcal{T} \le \mathcal{S}$ genau dann wenn die Identität $\mathrm{id}_X : X \to X$ stetig ist als Abbildung von dem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ in den topologischen Raum $(X, \mathcal{S})$.

5° In jedem Falle gibt es viele Topologien auf X und es ist bereits für endliche Mengen X eine kombinatorisch aufwendige Aufgabe, alle Topologien auf der Menge X zu bestimmen.

Auch im Falle des für uns interessanten Falles $\mathbb{R}$ gibt es also eine große Vielfalt von Topologien, aber nur die eine in 22.2.4° als natürliche Topologie definierte Topologie interessiert uns ernsthaft in dieser Vorlesung.

6° Wir erwähnen aber trotzdem noch eine weitere Topologie auf $\mathbb{R}$, die einen Zusammenhang mit der Algebra aufweist. Sie wird für beliebige Mengen X definiert. Eine Teilmenge U

von X heißt in dieser Topologie offen, wenn sie die leere Menge ist oder wenn sie Komplement einer endlichen Teilmenge von X ist. Der Zusammenhang zur Algebra: Diese Topologie ist auf $X = \mathbb{R}$ das System aller Komplemente von Nullstellenmengen von Polynomen.

7° Sei k ein Körper und sei $k[T_1, T_2, \dots, T_n]$ der Ring der Polynome in n Unbestimmten mit Koeffizienten in k. Das Nullstellengebilde eines Polynoms $f \in k[T_1, T_2, \dots, T_n]$ ist

$$N(f) := f^{-1}(0) = \{x \in k^n \,:\, f(x) = 0\} \subset k^n\,.$$

Die *Zariskitopologie* auf dem Raum k^n ist nun das System aller Mengen der Form

$$U = k^n \setminus \left\{f_1^{-1}(0) \cap \dots f_m^{-1}(0)\right\}$$

mit endlich vielen Polynomen $f_j \in k[T_1, T_2, \dots, T_n]$. Sie wird besser durch das System der abgeschlossenen Mengen beschrieben, siehe 22.6.3°.

Im Falle $n = 1$ stimmt die Zariskitopologie auf $X = k$ mit der in 6° gegebenen Topologie überein.

(22.4) Definition: Sei X ein topologischer Raum mit Topologie $\mathcal{T}$. Eine Menge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement $X \setminus A$ offen ist, d.h. ein Element von $\mathcal{T}$ ist.

Kommentar: Das bedeutet natürlich nicht, dass eine Teilmenge, die nicht offen ist, bereits abgeschlossen sein muss. Es gibt in der Regel viele Teilmengen, die weder offen noch abgeschlossen sind, fast ist man geneigt, zu behaupten, dass die meisten der Teilmengen keine der beiden Eigenschaften erfüllen, abgesehen von Spezialfällen (wie die feinste Topologie) und der Schwierigkeit, zu definieren, was denn „die meisten“ hier bedeuten soll. In $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie haben wir jedenfalls die halboffenen Intervalle $]a, b]$, $[c, d[$, die weder offen noch abgeschlossen sind, oder die Mengen $[a, b] \cup \mathbb{Q}$.

(22.5) Satz: *Das System aller abgeschlossenen Mengen $\mathcal{A}_X$ eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ erfüllt die folgenden zwei Bedingungen:*

S.1 *Für je zwei Elemente $A \in \mathcal{A}_X$ und $B \in \mathcal{A}_X$ gilt $A \cup B \in \mathcal{A}_X$, und es gilt $\emptyset \in \mathcal{A}_X$.*

S.2 *Für jede Familie $(A_\iota)_{\iota \in I}$ von Elementen $A_\iota \in \mathcal{A}_X$ gilt $\bigcap_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{A}_X$, und $X \in \mathcal{A}_X$.*

Eine topologische Struktur auf einer Menge X kann also genauso durch die Menge aller abgeschlossenen Mengen festgelegt werden. 17.04.2007

(22.6) Beispiele:

1° Für $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie gilt: $[a, b]$ ist abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$, und $A = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}_1\} \cup \{0\}$ ist abgeschlossen. Dagegen ist $B = A \setminus \{0\} = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}_1\}$ nicht abgeschlossen.

2° Die in 22.3.6° definierte Topologie ist die Topologie auf X, die als die abgeschlossenen Mengen neben $\emptyset$ und X gerade die endlichen Teilmengen von X hat.

3° Sei k ein Körper. Die Zariskitopologie (22.3.7°) auf $X = k^n$ ist die Topologie, welche die Nullstellenmengen von Polynomen als abgeschlossene Mengen hat.

Sei $R = k[T_1, T_2, \dots, T_n]$ der Ring der Polynome in n Unbestimmten mit Koeffizienten in k. Für $f \in R$ sei $N(f) := f^{-1}(0) = \{x \in k^n \,:\, f(x) = 0\} \subset k^n$ und für Teilmengen $\mathfrak{a} \subset R$ sei $N(\mathfrak{a}) := \{x \in k^n \mid \forall\, f \in \mathfrak{a} : f(x) = 0\} = \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} N(f)$.

Es soll gezeigt werden, dass das System $\mathcal{A} := \{N(\mathfrak{a}) \subset k^n \,:\, \mathfrak{a} \subset R\}$ die Axiome S.1 und S.2 erfüllt. Es gilt $N(f) \cup N(g) = N(fg)$ für $f, g \in R$, wobei $fg(x) = f(x)g(x)$, und $N(\mathfrak{a}) \cup N(\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$, wobei $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \{fg \,|\, f \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}\}$. Also ist S.1 erfüllt. S.2 ist direkt $\bigcap_{\iota \in I} N(\mathfrak{a}_\iota) = N(\bigcup_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota)$.

Ein Satz aus der Algebra (der Hilbertsche Basissatz) besagt, dass es zu jeder Menge $\mathfrak{a} \subset R$ endlich viele $f_1, \ldots, f_m \in R$ gibt mit $N(\mathfrak{a}) = N(\{f_1, \ldots, f_m\})$. Erst mit diesem Resultat ist die Aussage in 22.3.7° zu begründen.

(22.7) Definition: Sei X ein topologischer Raum mit dem System $\mathcal{T}$ der offenen Mengen und sei $a \in X$ ein Punkt. Eine *Umgebung von* a ist eine Teilmenge $W \subset X$, die eine offene Menge $U \in \mathcal{T}$ mit $a \in U$ enthält: $a \in U \subset W$. Sei $\mathcal{U}(a)$ das System der Umgebungen von a.

(22.8) Beispiele und Bemerkungen:

1° In $X = \mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie gilt: Jedes offene Intervall $]c, d[$ ist Umgebung jedes seiner Elemente; jedes abgeschlossen Intervall $[c, d]$ ist Umgebung von jedem a, $c < a < d$, aber nicht von c oder d; die Menge $[0, 1] \backslash \mathbb{Q}$ ist von gar keinem Punkt aus $\mathbb{R}$ Umgebung.

2° Im Falle der gröbsten Topologie auf X gilt $\mathcal{U}(a) = \{X\}$ für alle $a \in X$.

3° Im Falle der Topologie $\mathcal{T}$ auf X, die aus allen Komplementen von endlichen Mengen besteht, gilt für alle $a \in X$: $\mathcal{U}(a) = \mathcal{T} \backslash \{\emptyset, X \backslash \{a\}\} = \{X \backslash E \,|\, E \subset X, E \text{ endlich}, a \notin E\}$.

4° Es gilt allgemein für eine Teilmenge U in einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$: $U \in \mathcal{T} \iff \forall\, a \in U : U \in \mathcal{U}(a)\,.$

(22.9) Satz: *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{U}(a)$, $a \in X$, die Familie der zugehörigen Umgebungssysteme. Dann sind die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

V.1 $\forall\, a \in X\, \forall\, V \in \mathcal{U}(a) \,:\, a \in V$.

V.2 $\forall\, a \in X\, \forall\, V \in \mathcal{U}(a) \forall\, W \subset X : V \subset W \Longrightarrow W \in \mathcal{U}(a)$. (Jedes System $\mathcal{U}(a)$ ist ein *Filter*.)

V.3 $\forall\, a \in X\, \forall\, V, W \in \mathcal{U}(a) \,:\, V \cap W \in \mathcal{U}(a)$.

V.4 $\forall\, a \in X\, \forall\, V \in \mathcal{U}(a)\, \exists\, W \in U(a) : (W \subset V \text{ und } \;\forall\, b \in W : W \in \mathcal{U}(b))$.

(22.10) Satz: *Durch eine Familie $(\mathcal{U}(a)\,,\, a \in X)$ von Teilmengen $\mathcal{U}(a) \subset \mathcal{P}(X)$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X mit den Eigenschaften V.1 – V.4 in 22.9 wird auf folgende Weise eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X bestimmt, deren Umgebungssysteme gerade wieder $\mathcal{U}(a)\,,\, a \in X$, sind (vgl. 22.8.4 °):*

$$U \in \mathcal{T} \;:\Longleftrightarrow\; \forall\, a \in U\, \exists\, V \in \mathcal{U}(a) : V \subset U\,.$$

(22.11) Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

1° Eine *Basis* der Topologie ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ mit der Eigenschaft, dass jede offene Menge sich als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ darstellen lässt.

2° Eine *Subbasis* der Topologie ist ein System $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, so dass die Menge der endlichen Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{S}$ eine Basis von $\mathcal{T}$ bildet.

3° Eine Umgebungsbasis zu $a \in X$ ist ein System $\mathcal{B}(a)$ mit der Eigenschaft, dass jede Umgebung $V \in \mathcal{U}(a)$ eine Teilmenge eines Elementes B aus $\mathcal{B}(a)$ ist. Also $V \subset B \in \mathcal{B}(a)$.

(22.12) Beispiele:

1° In $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie ist die Menge aller offenen Intervalle eine Basis der Topologie. Ebenso ist $(]r, s[\; :\; r, s \in \mathbb{Q})$ eine Basis der Topologie. $\mathbb{R}$ hat also eine abzählbare Basis der Topologie.

2° Natürlich ist die Topologie $\mathcal{T}$ für jeden topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ selbst eine Basis der Topologie. Und jede Basis ist auch eine Subbasis.

3° In $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie ist die Familie von Abschnitten $(A_r, B_s \,:\, r,s \in R)$ der Form $A_r = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < r\}$ oder $B_s = \{x \in R \,|\, x > s\}$ eine Subbasis der natürlichen Topologie.

4° Für die Topologie $\mathcal{T}$ auf X, die aus allen Komplementen von endlichen Mengen besteht, ist $(X \backslash \{a\} \mid a \in X)$ eine Subbasis.

(22.13) Definition: Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ heißt *stetig im Punkte* $a \in X$, wenn für alle Umgebungen $W \in \mathcal{U}(f(a))$ von $f(a)$ stets eine Umgebung $V \in \mathcal{U}(a)$ mit $f(V) \subset W$ existiert.

(22.14) Satz: *Für eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

1° *f ist stetig (im Sinne von 22.1).*

2° *f ist in allen Punkten $a \in X$ stetig.*

3° *Für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.*

(22.15) Definition: $(X,\mathcal{T})$ sei ein topologischer Raum und $Z \subset X$ eine Teilmenge. Dann ist

$$\mathcal{T}|_Z := \{W \cap Z \,:\, W \in \mathcal{T}\}$$

eine Topologie auf Z und $(Z,\mathcal{T}|_Z)$ ist der durch Z gegebene *Unterraum*. $\mathcal{T}|_Z$ wird auch die *induzierte Topologie* oder die *Relativtopologie* genannt.

(22.16) Beispiele und Bemerkungen:

1° In $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie haben wir die folgenden Unterräume:

$]a,b[$, $[a,b]$ und weitere Intervalle. Man beachte, dass $]a,b[$ in der auf $]a,b[$ induzierten Topologie abgeschlossen ist und dass analog $[a,b]$ in der auf $[a,b]$ induzierten Topologie offen ist.

$\mathbb{N}$ oder $\{\frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}_1\}$. Diese beide Unterräume erhalten die feinste (d.h. diskrete Topologie) als induzierte Struktur.

$Z = \{\frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}_1\} \cup \{0\}$. Die induzierte Topologie ist nicht die feinste Topologie. Jede im Unterraum Z offene Menge V, die 0 enthält, umfasst auch $\frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ab einem geeigneten n_0. 20.4.2007

2° $\exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ ist bijektiv und stetig, auch in Bezug auf die induzierte Struktur. Die Umkehrfunktion $\log :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ ist ebenfalls stetig in der induzierten Struktur. Insofern sind die topologischen Räume $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie und $]0,\infty[$ in der von der natürlichen Topologie induzierten Topologie „isomorph“.

Ebenso ist $\psi :]0,\infty[\to]0,1[$, $t \mapsto \frac{t}{1+t}$, bijektiv und stetig in den induzierten Topologien mit der stetigen Umkehrfunktion $]0,1[\to]0,\infty[$, $y \mapsto \frac{1}{1-y}$. Insgesamt liefert also $\psi \circ \exp : \mathbb{R} \to]0,1[$ eine bijektive stetige Funktion mit stetiger Umkehrfunktion, d.h. $\mathbb{R}$ und der Unterraum $]0,1[$ sind im topologischen Sinne „isomorph“. (Sie sind sogar im differenzierbaren und analytischen Sinne „isomorph“, weil $\psi \circ \exp$ und $\log \circ \psi^{-1}$ beliebig oft differenzierbare und analytische Funktionen sind.)

3° Vielfach benutzt wird der folgende einfache Sachverhalt: Seien $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{S})$ topologische Räume und sei $Z \subset Y$. Eine Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(X) \subset Z$ ist genau dann stetig, wenn (die Restriktion) $f : X \to Z$ bezüglich der induzierten Topologie stetig ist.

(22.17) Definition: Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ heißt *topologisch* (oder *homöomorph*), wenn f stetig und bijektiv ist, und die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig ist. f heißt auch *Homöomorphismus.*

$(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ heißen *topologisch äquivalent* (oder *homöomorph*), wenn es eine solche topologische Abbildung zwischen X und Y gibt.

(22.18) Beispiele: 1° $[0, 1]$ in der von der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}$ induzierten Topologie ist nicht homöomorph zu $\mathbb{R}$ in der natürlichen Topologie.

2° $]0, 1[$ in der von der natürlichen Topologie induzierten Topologie ist homöomorph zu $Z := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 , z \neq 1\}$ in der von der natürlichen Topologie auf $\mathbb{C}$ (vgl. 22.2.6°) induzierten Topologie. Ein Homöomorphismus ist durch $\varphi :]0, 1[\to Z , t \mapsto \exp(2\pi it)$, gegeben. Es ist $Z = \mathbb{S}\backslash 1 , \mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

3° Achtung: Für eine stetige und bijektive Abbildung ist die Umkehrabbildung nicht immer stetig, wie das Beispiel $\varphi :]0, 1] \to \mathbb{S} , t \mapsto \exp(2\pi it)$, zeigt:

Die Teilmenge $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ von $]0, 1]$ ist offen in $]0, 1]$ in der induzierten Topologie und das Urbild von $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ in Bezug auf die Umkehrfunktion φ^{-1} ist $\varphi(\left]\frac{1}{2}, 1\right]) =: D$, die Menge der Punkte $\exp i\alpha , \pi < \alpha \leq 2\pi$. Diese Menge ist nicht offen, denn für jede offene Umgebung $W \subset \mathbb{C}$ von 1 im topologischen Raum $\mathbb{C}$ mit der natürlichen Topologie gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $\exp(i\alpha) \in W \cap \mathbb{S}$ für $|\alpha| < \epsilon$. Daher gibt es keine Umgebung W von 1 mit $W \cap \mathbb{S} \subset D$.

Hier haben wir also im Rahmen der stetigen Abbildungen zwischen topologischen Räumen ein ganz anderes Verhalten als bei linearen Abbildungen oder bei Gruppenhomomorphismen.

(22.19) Definition: Seien $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ topologische Räume. Die *Produkttopologie* $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$ ist die von $\{U \times V \,|\, U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{S}\} =: \mathcal{B}$ als Basis erzeugte Topologie.

Analog für endliche Produkte: Für topologische Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, \dots, m$, ist die Produkttopologie durch

$$\prod_{i=1}^{m} \mathcal{T}_i := \{W \subset \prod_{i=1}^{m} X_i \,|\, \forall\, a \in W \,\exists\, U_i \in \mathcal{T}_i : a \in \prod_{i=1}^{m} U_i \subset W \}$$

gegeben.

(22.20) Satz: *Die Produkttopologie ist eine Topologie, und die Projektionen* $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X , (x, y) \mapsto x$ *und* $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y , (x, y) \mapsto y$ *sind stetig Abbildungen. Es gilt für alle Abbildungen* $f : Z \to X \times Y$*:* f *ist genau dann stetig, wenn* $\mathrm{pr}_X \circ f$ *und* $\mathrm{pr}_Y \circ f$ *stetig sind.*

Die Produkttopologie ist die gröbste Topologie, für die die Projektionen $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ *und* $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ *stetig sind. Analog für endliche Produkte.*[1]

Ein elementarer und wichtiger Nachtrag zur Permanenz der Stetigkeit:

(22.21) Satz:

1° *Die Komposition* $f \circ g$ *von zwei stetigen Abbildungen ist stetig.*

2° *Für stetige Abbildungen* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *sind* $f + g$ *und* fg *wieder stetig.*

(22.22) Beispiel: $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ haben damit die Produkttopologie als eine natürliche Topologie, genauso wie der $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}^{n\times m}$ der $n \times m$-Matrizen.

[1] Diese zwei Ergänzungen wurden nicht vorgetragen.

Zum Abschluss des Paragraphen die Quotiententopologie[2]:

(22.23) Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und es sei auf X eine Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben mit der Quotientenabbildung $\pi : X \to X/_\sim$ in den Quotientenraum $X/_\sim$ der Äquivalenzklassen. Auf $X/_\sim$ wird die Quotiententopologie $\mathcal{T}/_\sim$ folgendermaßen definiert: Für $U \subset X/_\sim$ sei

$$U \in \mathcal{T}/_\sim \;:\Longleftrightarrow\; \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}\,.$$

($\pi^{-1}(U) = \{x \in X \mid \exists\, z \in U : x \in z\} = \bigcup_{z \in U} z$)

(22.24) Satz: *$\mathcal{T}/_\sim$ ist eine Topologie und π ist stetig. Eine Abbildung $g : X/_\sim \to Y$ in einen topologischen Raum ist genau dann stetig, wenn $g \circ \pi : X \to Y$ stetig ist.*

(22.25) Beispiel: Sei $X = \mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie und sei $x \sim y :\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : x - y = k$. Dann ist der Quotient $S := \mathbb{R}/_\sim = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ homöomorph zur Einheitskreislinie $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$ mit der induzierten Topologie (vgl. Übungen).

§23 Metrische Räume und normierte Räume

In diesem Paragraphen geht es darum, interessante Klassen von Beispielen topologischer Räume zu studieren, unter denen unter anderen auch $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ mit ihrer natürlichen Topologie (vgl. 22.22) und ihre Unterräume $X \subset \mathbb{K}^n$ mit der Relativtopologie vorkommen.

(23.1) Definition: Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) mit einer Menge X und einer Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ (*Metrik* genannt oder *Distanz*), so dass für alle $x, y, z \in X$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

D.1 $d(x, y) \geq 0$ und $(d(x, y) = 0 \iff x = y)$.

D.2 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

D.3 $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie).

Die *offene Kugel* oder der *offene Ball um $a \in X$ mit Radius $r > 0$* ist die Menge

$$B(a, r) := \{x \in X \,:\, d(a, x) < r\}\,,$$

die *abgeschlossen Kugel* entsprechend

$$\overline{B}(a, r) := \{x \in X \,:\, d(a, x) \leq r\}\,.$$

(23.2) Satz: *Ein metrischer Raum (X, d) (bzw. eine Metrik auf X) induziert auf der Menge X eine Topologie*

$$\mathcal{T}(d) := \{U \subset X \mid \forall\, x \in U\, \exists\, r > 0 : B(x, r) \subset U\}\,.$$

$\mathcal{T}(d)$ heißt auch die *von d erzeugte Topologie*.

Die Axiome D.1 – D.3 haben vor allem geometrischen Charakter, wie das folgende Lemma zeigt.

---

[2] nicht vorgetragen

(23.3) Lemma: 1° *Auch für eine beliebige Funktion* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *ist*

$$\mathcal{T}(d) := \{U \subset X \mid \forall\, x \in U\, \exists\, r > 0 : B(x,r) \subset U\}$$

eine Topologie auf X*, ohne dass ein Teil der Axiome D.1 – D.3 erfüllt sein müsste.*

2° *Die Symmetrie* D.3 *bedeutet, dass die abstrakte „Distanz“* $d(x,y)$ *von* x *nach* y *mit der entsprechenden Distanz* $d(y,x)$ *von* y *nach* x *zusammenfällt.*

3° *Die Dreiecksungleichung* D.2 *hat zur Folge, dass die offene Kugel* $B(a,r)$ *tatsächlich offen ist, d.h.* $B(a,r) \in \mathcal{T}(d)$.

4° D.1 *impliziert zusammen mit* D.2 *und* D.3*, dass es zu verschiedenen Punkten* x, y , $x \neq y$, *immer Umgebungen* U *von* x *und* V *von* y *gibt, so dass* $U \cap V = \emptyset$ *gilt: Mit* $r = \frac{1}{2} d(x,y) > 0$ *ist* $B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset$ *.*

(23.4) Definition: Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *Hausdorffsch* oder *separiert*, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ gibt, die einen leeren Durchschnitt haben: $U \cap V = \emptyset$.

(23.5) Bemerkungen und Beispiele:

1° Für einen metrischen Raum (X, d) ist $(X, \mathcal{T}(d))$ ein Hausdorffscher topologischer Raum.

2° Die feinste Topologie $\mathcal{T}_f$ auf einer Menge X (vgl. 22.3.2°) kann durch eine Metrik induziert werden: Für $x, y \in X$ setze man $d(x,x) := 0$ und $d(x,y) := 1$ im Falle $x \neq y$. Dann ist $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}(d)$. Diese Metrik heißt auch die *diskrete* Metrik, weil sie die diskrete Topologie induziert.

3° Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X heißt *metrisierbar*, wenn es eine Metrik d auf X gibt, so dass $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$ gilt. Der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt dann metrisierbar. Die feinste Topologie $\mathcal{T}_f$ ist also metrisierbar und damit auch Hausdorffsch.

4° Die gröbste Topologie $\mathcal{T}_g = \{\emptyset, X\}$ (vgl. 22.3.1°) ist nicht metrisierbar, wenn X mehr als einen Punkt enthält, denn sie ist nicht Hausdorffsch, und jede metrisierbare Topologie ist notwendig Hausdorffsch.

5° Es gibt für topologische Räume $(X, \mathcal{T})$ im Falle der Metrisierbarkeit mehrere Metriken, die die Topologie induzieren, wenn $X \neq \emptyset$.

Für die feinste Topologie gilt zum Beispiel $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}(d_R)$, wenn d_R folgendermaßen gegeben ist: Für $x, y \in X$ setze man $d_R(x,x) := 0$ und $d_R(x,y) := R$ im Falle $x \neq y$. Dann ist $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}(d_R)$ und $d \neq d_R$ im Falle $R \neq 1$.

Ein anderes Beispiel zu einer metrisierbaren Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$ auf X mit vorgegebener Metrik d: Für $a, b \in X$, $a \neq b$, sei $\tau \in]0, d(a,b)[$. Für $x, y \in X$ setze man $d_\tau(x,y) := d(x,y)$, falls $d(x,y) < \tau$, und $d_\tau(x,y) := \tau$, falls $d(x,y) \geq \tau$. Dann ist $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}(d_\tau)$. Diese neue Metrik d_τ hat die Eigenschaft, dass der ganze Raum X in der Kugel $B(x, 2\tau)$ liegt. [24.4.07]

(23.6) Definition: (X, d) sei metrischer Raum.

1° Eine Teilmenge $Z \in X$ heißt *beschränkt*, wenn es $a \in X$ und $R > 0$ mit $Z \subset B(a, R)$ gibt. Das ist gleichbedeutend mit

$$\sup\{d(x,y) \,|\, x, y \in Z\} < \infty\,.$$

Der metrische Raum heißt *beschränkt*, wenn X als Teilmenge beschränkt ist.

2° Zwei Metriken heißen *äquivalent*, wenn sie dieselbe Topologie induzieren.

Zu jeder metrisierbaren Topologie $\mathcal{T}$ auf X gibt es also eine Metrik d mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$, für die (X, d) beschränkt ist (nach 23.5.5°).

Die Grundbegriffe der Topologie aus $\S$ 22 für metrisierbare Topologien:

(23.7) Satz: *Sei (X,d) ein metrischer Raum mit der Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$.*

1° *Ein Abbildung f in einen weiteren metrischen Raum (Y,d) ist genau dann stetig in $a \in X$, wenn*

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X : d(a,x) < \delta \implies d(f(a), f(x)) < \varepsilon\,.}$$

(Wir erlauben uns, darauf zu verzichten, die Metriken als d_X, d_Y zu bezeichnen.)

2° *Insbesondere ist eine Abbildung $f : X \to Y$ schon dann stetig in X, also stetig in allen Punkten $a \in X$,*

i) *wenn $d(x,x') = d(f(x), f(x'))$ für alle $x, x' \in X$ gilt (f heißt dann* Isometrie*),*

ii) *oder wenn es $L > 0$ gibt, so dass $d(f(x), f(x')) \le L d(x,x')$ für alle $x, x' \in X$ gilt (f heißt dann* lipschitzstetig *und L ist die zugehörige* Lipschitzkonstante*).*

iii) *oder wenn*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x, x' \in X : d(x,x') < \delta \implies d(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

(f heißt dann gleichmäßig stetig*).*

3° *$\overline{B}(a,r)$ ist für $a \in X$, $r > 0$, stets abgeschlossen.*

4° *Das Umgebungssystem $\mathcal{U}(a)$ ist $\mathcal{U}(a) = \{V \in X \,|\, \exists\, r > 0 : B(a,r) \subset V\}$, und eine Umgebungsbasis ist z.B. durch die offenen Kugeln $\{B(a,r) \,|\, r > 0\}$ um a aber auch durch die abgeschlossenen Umgebungen $\{\overline{B}(a,r) \,|\, r > 0\}$ gegeben. Weitere Umgebungsbasen im Punkte $a \in X$: $\{B(a,r) \,|\, r > 0, r \in \mathbb{Q}\}$ oder $\{\overline{B}(a, \frac{1}{n}) \,|\, n \in \mathbb{N}_1\}$. Ein metrischer Raum hat also immer abzählbare Umgebungsbasen.*

Wegen der Abzählbarkeit der Umgebungsbasen spielen die Folgen und ihre Konvergenz eine bedeutende Rolle in der Theorie der metrischen Räume, wie wir im nachfolgenden Paragraphen sehen werden.

Offensichtlich ist eine Isometrie lipschitzstetig mit einer Lipschitzkonstanten $L = 1$.

Eine lipschitzstetige Abbildung ist gleichmäßig stetig, denn zu $\varepsilon > 0$ hat man $\delta := \frac{\varepsilon}{L} > 0$ und es gilt dann für $x, x' \in X$ mit $d(x,x') < \delta$ stets $d(f(x), f(x')) \le L d(x,x') < L\delta = \varepsilon$.

Zur Hausdorffeigenschaft topologischer Räume:

(23.8) Satz: *X, Y seien topologische Räume*[3]

1° *Sind X, Y Hausdorffräume, so sind die Unterräume Z von X in der Relativtopologie Hausdorffsch, und es ist der Produktraum $X \times Y$ Hausdorffsch.*

2° *Sind X, Y metrisierbar, so auch die Unterräume Z von X und der Produktraum $X \times Y$.*

Eine typische Metrik auf dem Produkt, die die Produkttopologie erzeugt, ist

$$d((x,y),(x',y')) = \max\{d_X(x,x'), d_Y(y,y')\}$$

[3]Wir bezeichnen im Folgenden gelegentlich einen topologischen Raum einfach mit X, ohne das System der offenen Mengen explizit anzugeben.

wenn d_X die Topologie auf X und d_Y die auf Y induziert. Eine andere ist

$$d((x,y),(x',y')) = d_X(x,x') + d_Y(y,y')\,.$$

(23.9) Paradebeispiel:

1° Die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}$ ist metrisierbar mit der (euklidischen) Metrik $d(x,y) := |x-y|$. Genauso ist die natürliche Topologie auf $\mathbb{C}$ metrisierbar.

2° Auf $\mathbb{R}^2$ haben wir die Produkttopologie, die durch die Produktmetrik $d((x,y),(x',y')) = \sup\{|x-x'|\,,|y-y'|\}$ gegeben. Diese Metrik und die euklidische Metrik auf $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ stimmen nicht überein, aber die von ihnen induzierte Topologie ist dieselbe, wie wir gleich sehen werden: Es ist die natürliche Topologie (vgl. 22.22 / 23.14 / 23.15).

3° Entsprechend ist die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n$ wie auch auf $\mathbb{C}^n$ metrisierbar, mit

$$d(x,y) = \sup\{\left|x^i - y^i\right| \mid i = 1,\dots,n\,\}\,,\ \text{ wobei }\ x = (x^1,x^2,\dots,x^n), y = (y^1,y^2,\dots,y^n) \in \mathbb{K}^n,$$

(oder mit der Metrik $d_1(x,y) := \sum_{i=1}^n \left|x^i - y^i\right|$).

4° [4] Die Zariskitopologie auf k^n ist für einen Körper k mit unendlich vielen Elementen wie z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ nicht Hausdorffsch, also auch nicht metrisierbar.

Damit könnten wir zufrieden sein. Wir haben eine natürliche Topologie auf $\mathbb{R}^n$ wie auch auf $\mathbb{C}^n$ als Produkttopologie (vgl. 22.22), und diese Topologie ist Hausdorffsch und metrisierbar.

Wir sind aber noch an weiteren Charakterisierungen der natürlichen Topologie interessiert, welche die Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ als spezielle normierte Räume beschreiben.

Normierte Räume:

Im Folgenden sei E stets ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$, und wir schreiben $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(23.10) Definition: Eine *Norm* auf E ist eine Abbildung $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften: Für alle $u,v \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

N.1 $\|u\| \geq 0$ und ($\|u\| = 0 \iff u = 0$).

N.2 $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|\,.$

N.3 $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$.

E zusammen mit der Norm $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ heißt dann *normierter Raum*.

(23.11) Satz: *Jede Norm $\| \ \|$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum definiert die zugehörige Metrik*

$$d(u,v) = d_{\| \ \|}(u,v) := \|u-v\|\ ,\ u,v \in E\,,$$

und damit eine metrisierbare Topologie $\mathcal{T}(d_{\| \ \|}) = \mathcal{T}(d)$. 27.04.2007

Bezüglich der durch die Metrik (also durch die Norm) induzierten Topologie $\mathcal{T}(d)$ sind die Strukturabbildungen

$$E \times E \longrightarrow E\,,\ (u,v) \longmapsto u - v, \quad \text{und} \quad \mathbb{K} \times E \longrightarrow E\,,\ (\lambda,v) \longmapsto \lambda v,$$

[4] nicht vorgetragen

stetig.

(23.12) Definition: Ein *topologischer Vektorraum* ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum E mit einer Topologie auf E, so dass die Abbildungen

$$E \times E \longrightarrow E\,,\ (u,v) \longmapsto u - v, \quad \text{und} \quad \mathbb{K} \times E \longrightarrow E\,,\ (\lambda, v) \longmapsto \lambda v,$$

stetig sind.

(23.13) Beispiele und Bemerkungen:

1° Normierte Räume „sind“ topologische Vektorräume.

2° Ein topologischer Vektorraum E heißt *normierbar*, wenn es eine Norm auf E gibt, so dass die induzierte Topologie die Ausgangstopologie ist. Man spricht dann von einer *Normtopologie*.

3° Unser Paradebeispiel $\mathbb{K}^n$ mit der in 22.22 gegebenen Produkttopologie ist normierbar, denn die in 23.8.2° und speziell in 23.9.3° beschriebene Metrik $d(x,y) := \sup\{\left|x^i - y^i\right| \mid i = 1,\ldots,n\}$, die die Topologie induziert, wird durch die Norm

$$\|x\|_\infty := \sup\{\left|x^i\right| \mid i = 1,\ldots,n\}\,,\ x = (x^1,\ldots,x^n) \in \mathbb{K}^n\,,$$

gegeben. (N.1 – N.3 für $\|\ \|_\infty$ gelten unmittelbar.)

4° Genauso wird für endlich viele normierte Räume $E_i, i = 1,\ldots,n$ mit den Normen $\|\ \|_i$ auf dem Produkt $\prod_{i=1}^n E_i$ der Vektorräume E_i die Produktnorm

$$\|x\| := \max\{\|x_i\|_i \,:\, i = 1,\ldots,n\}$$

definiert, die die Produkttopologie induziert.

5° Weitere Normen auf $E = \mathbb{K}^n$ sind für $p \in [1,\infty[$ die so genannten „p-*Normen*“:

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x^i|^p}\,,\ x = (x^1,\ldots,x^n) \in \mathbb{K}^n\,.$$

Es handelt sich tatsächlich um Normen nach den Ungleichungen von Hölder und Minkowski (vgl. 19.14).

6° Die 2-Norm auf $\mathbb{K}^n$ wird auch die *euklidische Norm* genannt. Sie stammt von dem (euklidischen oder unitären) Skalarprodukt

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$$

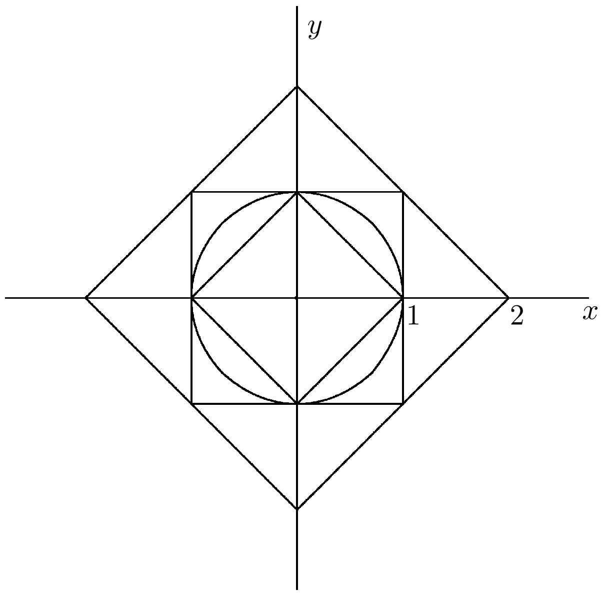
gegeben als

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x^i} y^i \quad \text{oder} \quad \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x^i \overline{y^i}.$$

Denn wir haben die Identität

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x,x\rangle}\ ,\ x \in \mathbb{K}^n\ .$$

(23.14) Graphischer Vergleich: Vergleich der Kugeln für die 1-Norm, die euklidische Norm und die ∞-Norm in $\mathbb{R}^2$. Die Kugeln werden durch ihre Begrenzungen dargestellt:



Das äußere Quadrat begrenzt die Kugel $B_1(0,2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| + |y| < 2\}\,.$
Das zweitgrößte Quadrat begrenzt die Kugel $B_\infty(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \max\{|x|\,,|y|\} < 1\}\,.$
Die Kreislinie begrenzt die euklidische Kugel $B_2(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1\}\,.$
Das innere Quadrat begrenzt die Kugel $B_1(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| + |y| < 1\}\,.$

Wenn man die anderen Normen zu $p \in [1,\infty[$ in dieses Bild einbeziehen will: Für die Kugeln zur p-Norm um 0 mit Radius 1 gilt

$$B_1(0,1) \subset B_p(0,1) \subset B_2(0,1)\,, \text{ wenn } 1 < p < 2\,,$$

$$B_2(0,1) \subset B_p(0,1) \subset B_\infty(0,1)\,, \text{ wenn } 2 < p < \infty\,.$$

Diese Bilder suggerieren, dass die durch die p-Normen gegebenen Topologien alle gleich sind, denn zu $a \in \mathbb{R}^2$, $p,q \in [1,\infty]$ und $r > 0$ findet man stets ein $s > 0$ mit $B_p(a,s) \subset B_q(a,r)$. Das gilt auch für beliebige Dimensionen:

(23.15) Lemma: *Auf $\mathbb{K}^n$ sind die durch die Normen $\|\ \|_p$ gegebenen Topologien alle gleich.*

Grundlage für dieses Resultat ist die einfach Abschätzung für $x \in \mathbb{R}^n$ und $p \neq \infty$:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{n}\,\|x\|_\infty\ .$$

Allgemeiner gilt, wie im folgenden Paragraphen bewiesen wird:

(23.16) Satz: *Für einen endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum E gilt:*

1° *Es gibt eine Norm auf E.*

2° *Die durch beliebige Normen auf E gegebenen Topologien stimmen alle überein (vgl. 24.22).*

(23.17) Lemma: *Zwei Normen $\|\ \|$, $\|\ \|'$ auf einem Vektorraum E induzieren genau dann dieselbe Topologie, wenn es Konstanten $c, C > 0$ gibt mit*

$$c\,\|v\| \leq \|v\|' \leq C\,\|v\|\ .$$

In diesem Falle heißen die Normen äquivalent*.* 04.05.2007

(23.18) Beispiele: Unendlichdimensionale normierte Räume:

1° Sie E ein normierter Raum über $\mathbb{K}$ mit der Norm $\|\ \|$, und sei X eine Menge. Die Menge der beschränkten Funktionen auf X ist

$$\mathcal{B}(X,E) := \{f : X \to E \mid \sup\{\|f(x)\| \,:\, x \in X\,\} =: \|f\|_\infty < \infty\,\}\,.$$

$\mathcal{B}(X,E)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum bezüglich der punktweisen Addition und Multiplikation. Es ist leicht zu sehen, dass für $f \in \mathcal{B}(X,E)$ durch

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\| \ : \ x \in X\}$$

eine Norm auf $\mathcal{B}(X,E)$ definiert wird. $\mathcal{B}(X,E)$ wird auch als $\ell_\infty(X,E)$ bezeichnet.

Im Spezialfall einer endlichen Menge X mit $n \in \mathbb{N}_1$ Elementen entspricht $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ dem Raum $\mathbb{K}^n$ mit der Norm $\| \ \|_\infty$ (vgl. 23.13.3°), also unserem Paradebeispiel.

2° Im Falle $X = \mathbb{N}$ ist $\ell_\infty = \mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{K}) = \ell_\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum der beschränkten Folgen $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $x_j \in \mathbb{K}$, mit der Norm $\|(x_j)\|_\infty = \sup\{|x_j| \ : \ j \in \mathbb{N}\}$. Dieser normierte Raum wird auch mit $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{K})$ bezeichnet.

3° Ein anderer wichtiger Folgenraum ist der Raum der quadratsummierbaren Folgen:

$$\ell_2 = \ell_2(\mathbb{K}) := \{(x_j) \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \sum_{j=0}^\infty |x_j|^2 < \infty\}$$

Wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\left|\sum_{j=0}^n \overline{x_j} y_j\right| \le \sqrt{\sum_{j=0}^n |x_j|^2}\sqrt{\sum_{j=0}^n |y_j|^2} \le \sqrt{\sum_{j=0}^\infty |x_j|^2}\sqrt{\sum_{j=0}^\infty |y_j|^2}$$

für $x, y \in \ell_2$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\langle x, y\rangle := \sum_{j=0}^\infty \overline{x_j} y_j$$

wohldefiniert und liefert eine euklidische bzw. unitäre Struktur auf ℓ_2 mit der Norm

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=0}^\infty |x_j|^2}$$

und der Ungleichung

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|_2 \, \|y\|_2$$

wie im Endlichdimensionalen.

4° Auf dem Raum $P(n)$ der Polynome $p \in \mathbb{K}[T]$ vom Grad $\le n$ ist

$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 \overline{p}(t) q(t)\, dt\,, \ \ p, q \in P(n)\,,$$

ein euklidisches oder unitäres Skalarprodukt. Die zugehörige Norm nenne wir die L_1-Norm.

5° Zu einem abstrakten euklidischen oder unitären Raum ist $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ eine Norm.

6° Der Raum $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ der stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit Werten in $\mathbb{K}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit der Norm $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$. $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ ist Unterraum von $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$. Analog $\mathcal{C}(I,E)$ für einen normierten Raum E.

Der Rest des Paragraphen wurde aus Zeitmangel nicht vorgetragen.

7° Im Falle eines kompakten Intervalles $I = [a, b]$ wird für $p \in [1, \infty[$ auf dem Raum $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ durch

$$\|f\|_p := \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p \, dt}\,, \ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$$

eine weitere Norm definiert, die auch die L_p-*Norm* genannt wird.

8° Für ein offenes Intervall $D \in \mathbb{R}$ wird der Raum der stetigen Funktionen $\mathcal{C}(D, \mathbb{K})$ mit der folgenden Topologie versehen: $U \subset \mathcal{C}(D, \mathbb{K})$ ist definitionsgemäß offen, wenn es zu jedem $f_0 \in U$ ein kompaktes Intervall $K \subset D$ und ein $r > 0$ mit $\{f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{K}) \,|\, \|f_0 - f\|_K < r\} \subset U$ gibt. Dabei ist $\|g\|_K := \sup\{|g(t)| \,:\, t \in K\}$. $\mathcal{C}(J, \mathbb{K})$ mit dieser Topologie ist ein Hausdorffraum.

(23.19) Definition: Eine Seminorm ist eine Funktion $\alpha : E \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften: Für alle $u, v \in E$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

SN.1 $\alpha(u) \geq 0$

SN.2 $\alpha(u + v) \leq \alpha(u) + \alpha(v)\,.$

SN.3 $\alpha(\lambda v) = |\lambda|\, \alpha(v)\,.$

Die entsprechende *offene Kugel* (oder *Ball*) ist $B_\alpha(u, r) := \{x \in E \,|\, \alpha(u - x) < r\}$.

Im Vergleich zu einer Norm fehlt die Bedingung $\alpha(u) = 0 \Rightarrow u = 0$. In 23.18.8° ist zum Beispiel durch $\alpha(g) = \|g\|_K$ eine Seminorm gegeben mit der Eigenschaft: Ist g einen stetige Funktion auf dem Intervall D, die auf dem kompakten Intervall $K \subset D$ verschwindet ohne identisch Null zu sein (solche g gibt es viele), dann ist $\|g\|_K = 0$ aber $g \neq 0$.

(23.20) Lemma: *Eine Familie Γ von Seminormen auf E definiert eine Topologie*

$$\mathcal{T}(\Gamma) := \{U \subset E \,|\, \forall\, v \in U \;\exists\, \alpha \in \Gamma \;\exists\, r > 0 : B_\alpha(v, r) \subset U\,\}$$

auf E.

Die Strukturabbildungen $(u, v) \mapsto u - v$ und $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ sind stetig in dieser Topologie. E mit der Topologie $\mathcal{T}(\Gamma)$ ist also ein topologischer Vektorraum.

(23.21) Definition: Ein topologischer Vektorraum E mit der Topologie $\mathcal{T}$ heißt *lokalkonvex*, wenn es eine Seminormfamilie Γ auf E gibt, welche diese Topologie induziert: $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\Gamma)$.

(23.22) Beispiele: 1° Der Raum der stetigen Funktionen $\mathcal{C}(D, \mathbb{K})$ auf einem offenem Intervall $J \neq \emptyset$ hat nach 23.18.8° die Topologie $\mathcal{T}(\Gamma)$ mit der Familie $\Gamma = (\|\ \|_K \,|\, K \subset D$ kompaktes Intervall). Dieser Vektorraum ist nicht normierbar, aber metrisierbar.

2° Analog für $m \in \mathbb{N}_1$: Der Raum der m-mal stetig differenzierbaren Funktionen $\mathcal{C}^m(D, \mathbb{K})$ auf einem offenem Intervall $D \neq \emptyset$ mit der Familie $\Gamma^m = (\|\ \|_K^m \,|\, K \subset D$ kompaktes Intervall) und

$$\|f\|_K^m := \sup\{\sum_{i=0}^m \left|f^{(i)}(t)\right| \,|\, t \in K\,\}\,.$$

Der Durchschnitt all dieser Räume ist der Raum $\mathcal{C}^\infty := \mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{K})$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit der Topologie $\mathcal{T}(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Gamma^m)$. Dieser Raum ist metrisierbar und sogar vollständig. Der Raum $\mathcal{D}$ der stetigen linearen Funktionale $\phi : \mathcal{C}^\infty \to \mathbb{K}$ ist der Raum der *Distributionen*.

3° Auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum

$$\mathbb{K}^X = \{\psi : X \to \mathbb{K} \,|\, \psi \text{ Funktion}\}$$

für eine beliebige Menge X ist für jede endliche Menge $H \subset X$ die Funktion

$$\alpha_H(\psi) := \sup\{|\psi(x)| \,:\, x \in H\,\}$$

eine Seminorm. Die von der Familie $(\alpha_H \,|\, H \subset X$ endlich) erzeugte Topologie ist die natürliche Produkttopologie auf $\mathbb{K}^X$. $\mathbb{K}^X$ mit dieser Topologie ist ein separierter, lokalkonvexer $\mathbb{K}$-Vektorraum. $\mathbb{K}^X$ ist genau dann normierbar, wenn X endlich ist. $\mathbb{K}^X$ ist genau dann metrisierbar, wenn X höchstens abzählbar ist.

4° Auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum

$$\mathbb{K}^{(X)} := \{\beta \in \mathbb{K}^X \mid \exists\, F \subset X \text{ endlich und } \forall\, x \in X \backslash F : \beta(x) = 0\}$$

der Familien $\beta \in \mathbb{K}^X$, die nur in endlichen vielen $x \in X$ nicht verschwinden, ist für jedes $\psi \in \mathbb{K}^X$ eine Seminorm

$$\gamma_\psi(\beta) := \sum_{x \in X} |\beta(x)\psi(x)| \ ,\ \beta \in \mathbb{K}^{(X)}\,,$$

definiert. $(\gamma_\psi \,|\, \psi \in \mathbb{K}^X)$ erzeugt eine lokalkonvexe Topologie auf $\mathbb{K}^{(X)}$, die Hausdorffsch ist. $\mathbb{K}^{(X)}$ mit dieser Topologie ist genau dann metrisierbar, wenn X endlich ist.

5° $\mathbb{K}^{(X)}$ ist in natürlicher Weise isomorph zum $\mathbb{K}$-Vektorraum der stetigen linearen Funktionale $\mathbb{K}^X \to \mathbb{K}$, und umgekehrt ist $\mathbb{K}^X$ in natürlicher Weise isomorph zum $\mathbb{K}$-Vektorraum der stetigen linearen Funktionale $\mathbb{K}^{(X)} \to \mathbb{K}$. Die entsprechende Paarung ist

$$\mathbb{K}^X \times \mathbb{K}^{(X)} \to \mathbb{K}\,,\ (\psi,\beta) \mapsto \sum_{x \in X} \beta(x)\psi(x)\,.$$

§24 Folgenkonvergenz und Kompaktheit

Im folgenden sei X stets ein metrischer Raum mit einer Metrik d. Es wird in diesem Paragraphen das Konzept des topologischen Raumes anhand der Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen wiederholt und erneut entwickelt. Die Folgenkonvergenz ist uns aus der Vorlesung MIA vertraut und ermöglicht in der Analysis die Beschreibung der infinitesimalen Prozesse.

(24.1) Definition: (Folgenkonvergenz) Eine Folge (x_n) aus X konvergiert gegen $x \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ stets $d(x_n, x) < \varepsilon$ gilt.

Notation: $x_n \longrightarrow x$ oder $\lim x_n = x$. Ausführlicher: $x_n \longrightarrow x(n \to \infty)$ oder

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x\,.$$

Also:

$$x_n \longrightarrow x \iff \forall\,\varepsilon > 0\;\exists\, m \in \mathbb{N}\;\forall\, n \in \mathbb{N}_m : d(x_n, x) < \varepsilon \iff d(x_n, x) \longrightarrow 0\,.$$

(24.2) Beispiele:

1° Bekannt in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit dem Abstand $d(x,y) = |x-y|$.

2° In unserem Paradebeispiel $\mathbb{K}^n$ gilt für $X \subset \mathbb{K}^n$ mit der von der natürlichen Topologie induzierten Topologie auf X:

$$x_k \longrightarrow x \iff x_k^i \longrightarrow x^i\,(k \to \infty),\; i = 1, \dots, n\,.$$

Dabei ist $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n) \in \mathbb{K}^n$, $x_k^i \in \mathbb{K}$.

3° Folgenkonvergenz in ℓ_∞: $x_k \longrightarrow x$ für Folgen $x_k = (x_k^i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty$ ist äquivalent zu

$$\forall\,\varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall\, k \in \mathbb{N}_N\; \forall\, i \in \mathbb{N} : \left|x_k^i - x^i\right| < \varepsilon\,.$$

Konvergenz in ℓ_∞ bedeutet also gleichmäßige Konvergenz in den Indizes $i \in \mathbb{N}$ bzw., wenn man die Folgen als Abbildung $x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ auffasst: Gleichmäßige Konvergenz in Bezug auf den Definitionsbereich $\mathbb{N}$.

4° Konvergenz in $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$: Eine Funktionenfolge $f_k \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ konvergiert genau dann gegen f in der Supremumsnorm, d.h. $\|f_k - f\|_\infty \longrightarrow 0$ (vgl. 23.18.6°), wenn:

$$\forall\,\varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall\, k \in \mathbb{N}_N\; \forall\, t \in [0,1] \,:\, |f_k(t) - f(t)| < \varepsilon\,.$$

$f_k \to f$ in $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ in Bezug auf die Norm $\|\ \|_\infty$ bedeutet also gerade, dass (f_k) gleichmäßig gegen f konvergiert, wie wir das in MIA hätten kennen lernen sollen (siehe 24.24).

5° Auf dem Vektorraum $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ gibt es weitere sinnvolle Normen (vgl. 23.18.7°), zum Beispiel die L_1-Norm

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\,dt\,.$$

Es ist leicht zu sehen, dass dadurch wirklich eine Norm definiert wird. Es gilt

$$\|f\|_1 \le \|f\|_\infty\ ,$$

weil $|f(t)| \le \|f\|_\infty$. Also ist jede Folge (h_n), die in Bezug auf $\|\ \|_\infty$ konvergiert auch konvergent in Bezug auf $\|\ \|_1$. Die Umkehrung gilt aber nicht: Sei $g_n(t) = t^n$. Dann ist

$$\|g_n\|_1 = \int_0^1 |t^n|\,dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1}|_0^1 = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0\,.$$

Es ist aber $\|g_n\|_\infty = 1$. Daher kann g_n nicht gegen 0 in der Norm $\|\ \|_\infty$ konvergieren.

(24.3) Definition: Sei $Z \subset X$ Teilmenge eines metrischen Raumes X. Ein Punkt $a \in X$ heißt *Berührpunkt* von Z, wenn für alle $r > 0$ die offene Kugel $B(a,r)$ mit Z gemeinsame Punkte hat, das heißt wenn $B(a,r) \cap Z \neq \emptyset$ gilt. Mit $\overline{Z}$ wird die Menge der Berührpunkte bezeichnet. Diese Menge wird auch die *abgeschlossene Hülle* von Z genannt.

Es gilt also:

$$a \in \overline{Z} \iff \forall\, U \in \mathcal{U}(a) : U \cap Z \neq \emptyset\,.$$

(24.4) Beispiele:

1° $Z = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} : \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

2° $\overline{[0,1]} = [0,1] = \overline{]0,1[}$ in $X = \mathbb{R}$.

3° $Z = \{2^{-n} \,:\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R} : \overline{Z} = Z \cup \{0\}$ in $\mathbb{R}$.

4° $Z = \{(t, \sin\frac{1}{t}) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t \in\,]0,1]\} \,:\, \overline{Z} = Z \cup \{0\} \times ([-1,1])$ in $\mathbb{R}^2$.

5° In metrischen Räumen gilt stets $\overline{B(x,r)} \subset \overline{B}(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}$ und in manchen Fällen auch $\overline{B(x,r)} \neq \overline{B}(x,r)$.

6° In normierten Räumen gilt für die durch die Norm induzierte Metrik stets $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$.

(24.5) Definition: (offener Kern, Rand) Für eine Teilmenge $Z \subset X$ ist

$$\mathring{Z} := \{z \in X \mid \exists\, r > 0 : B(z,r) \subset Z\}$$

der *offene Kern* der Menge Z, und es ist

$$\partial Z := \overline{Z} \backslash \mathring{Z}$$

der Rand von Z (in Bezug auf X).

Es gilt

$$x \in \partial Z \iff \forall\, r > 0 \,:\, B(x,r) \cap Z \neq \emptyset \text{ und } B(x,r) \cap (X \backslash Z) \neq \emptyset\,.$$

(24.6) Beispiele:

1° $\partial(]a,b[) = \{a,b\} = \partial([a,b])$.
2° $\partial\{a\} = \{a\}$ für a in $\mathbb{R}$.
3° $\partial\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1$ in $X = \mathbb{C}$.
4° Für $Z = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: $\mathring{Z} = \emptyset$, $\overline{Z} = \mathbb{R}$ und $\partial Z = \mathbb{R}$.
5° In $\mathbb{R}^2$: $\partial([0,1] \times [0,1]) = (\{0,1\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0,1\})$.

(24.7) Satz: *Für $Z \subset X$ gilt:*

1° $\overline{Z} = \{a \in X \mid \exists\, x_n \in Z : x_n \to a\}$.
2° $Z \subset \overline{Z}$.
3° $\overline{Z}$ *ist abgeschlossen.*
4° $\forall\, A \subset X \,:\, A$ *abgeschlossen und* $Z \subset A \implies \overline{Z} \subset A$.
5° Z *ist abgeschlossen* $\iff \overline{Z} = Z$.
6° $\overline{Z} = \bigcap\{A \subset X \,|\, A \text{ abgeschlossen und } Z \subset A\}$.

(24.8) Satz: *Für $Z \subset X$ gilt:*

1° $X \backslash \mathring{Z} = \overline{X \backslash Z}$.
2° $\mathring{Z} \subset Z$.
3° $\mathring{Z}$ *ist offen.*
4° $\forall U \subset X \,:\, U$ *offen und* $U \subset Z \implies U \subset \mathring{Z}$.
5° Z *offen* $\iff \mathring{Z} = Z$.
6° $\mathring{Z} = \bigcup\{U \subset X \,|\, U \text{ offen und } U \subset Z\}$.

Die Charakterisierung der Stetigkeit durch Folgen:

(24.9) Satz: $f : X \to Y$ *ist genau dann stetig in* $x \in X$*, wenn für alle konvergenten Folgen* (x_n) *in* X *mit* $\lim x_n = x$ *gilt:* $\lim f(x_n) = f(x)$.

(24.10) Definition: Ein metrischer Raum X heißt *vollständig*, wenn alle Cauchyfolgen aus X konvergieren.

Dabei ist $(x_k)\,,\, x_k \in X$, definitionsgemäß eine *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $k, l \in \mathbb{N}_n$ stets $d(x_k, x_l) < \varepsilon$ gilt.

Ein *Banachraum* ist ein normierter Raum mit Norm $\| \;\|$, der als metrischer Raum mit der Metrik $d_{\| \;\|}$ ein vollständiger metrischer Raum ist.

(24.11) Beispiele:

1° $X = \mathbb{R}$ ist vollständiger metrischer Raum in der Metrik $d(s,t) = |s - t|$ genauso wie $X = \mathbb{C}$ in der euklidischen Metrik $d(z,w) = |z - w|$.

2° Auch $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind vollständige normierte Räume in der p-Norm. 11.05.2007

3° Der Raum ℓ_∞ der beschränkten Folgen mit der Supremumsnorm ist ein Banachraum.

4° $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ mit Supremumsnorm ist ebenso ein Banachraum über $\mathbb{R}$. Nachzutragen ist die Aussage, dass eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen als Grenzwert eine stetige Funktion hat (vgl. 24.25).

5° Der Raum der Polynome $\mathbb{C}[T]$ mit jeder der Normen $\| \;\|_1$, $\| \;\|_2$ oder $\| \;\|_\infty$ ist nicht vollständig.

6° Die L_1-Norm auf $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ ist nicht vollständig (vgl. 24.2.5°).

7° Die Folgenräume ℓ_p, $p \in [1,\infty]$, sind wie der Folgenraum ℓ_∞ Banachräume unendlicher Dimension.

(24.12) Lemma: *Eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist vollständig in der Relativtopologie.*

Kompakte Mengen und Räume:

Zum Abschluss der topologischen Vorbetrachtungen kommen wir zur Kompaktheit von Mengen in einem metrischen Raum.

(24.13) Definition: Eine Teilmenge Z eines metrischen Raumes ist *folgenkompakt*, wenn jede Folge aus Z eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in Z hat.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass hat jede in $\mathbb{R}$ beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge. Das zieht nach sich, dass eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ stets folgenkompakt ist. Im $\mathbb{K}^n$ bedeutet das:

(24.14) Satz: (Heine-Borel) *Die folgenkompakten Teilmengen des $\mathbb{K}^n$ sind genau die Teilmengen, die beschränkt und abgeschlossen sind.*

Kommentar: $B \subset \mathbb{K}^n$ ist also genau dann folgenkompakt, wenn $\sup\{\|x\|_\infty : x \in B\} < \infty$ ist und für jede konvergente Folge (b_n) aus B gilt: $\lim b_n \in B$.

(24.15) Beispiel: In ℓ_∞ ist $\overline{B}(0,1)$ beschränkt und abgeschlossen, aber nicht folgenkompakt.

(24.16) Satz: *Stetige Bilder folgenkompakter Mengen sind folgenkompakt: Ist $f : X \to Y$ stetige Abbildung metrischer Räume und ist $K \subset X$ folgenkompakt, so ist auch $f(K)$ folgenkompakt in Y.*

Wichtige Folgerungen: Eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist auf einer folgenkompakten Teilmenge beschränkt und es werden Infimum und Supremum angenommen. Es gibt also $x_1, x_2 \in K$ mit

$$\inf\{f(x) : x \in K\} = f(x_1) \text{ und } \sup\{f(x) : x \in K\} = f(x_2) .$$

Das gilt analog für stetige $f : X \to E$ mit Werten in Banachräumen E. Für folgenkompakte $K \subset X$ ist $f(K)$ beschränkt und es gibt $x_1, x_2 \in K$ mit

$$\inf\{\|f(x)\| : x \in K\} = \|f(x_1)\| \text{ und } \sup\{\|f(x)\| : x \in K\} = \|f(x_2)\| ,$$

weil $x \mapsto \|f(x)\|$ stetig ist.

(24.18) Definition: Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes X heißt *kompakt*, wenn es zu jeder offenen Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung gibt. Der metrische Raum X heißt *kompakt*, wenn X als Teilmenge von X kompakt ist.

Eine offene Überdeckung von K ist eine Familie $(U_\iota)_{\iota \in I}$ von offenen Teilmengen von X mit $K \subset \bigcup\{U_\iota : \iota \in I\}$. K ist also genau dann kompakt, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $(U_\iota)_{\iota \in I}$ endlich viele $\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_m \in I$ mit

$$K \subset \bigcup_{\mu=1}^{m} U_{\iota_\mu} = U_{\iota_1} \cup U_{\iota_2} \cup \ldots U_{\iota_m} .$$

Wir sehen: $]0,1[$ ist nicht kompakt, denn $U_n := \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n+1} < x < 1\}$ definiert eine Überdeckung, die keine endliche Teilüberdeckung hat. 15.05.2007

Aber die abgeschlossene Menge $Z = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}_1\} \cup \{0\}$ ist kompakt. Jede offene Überdeckung (U_ι) enthält 0, also gibt es $\iota_0 \in I$ mit $0 \in U_{\iota_0}$. Es folgt, dass es m gibt mit $2^{-n} \in U_{\iota_0}$ für alle $n > m$. Seien $\iota_j \in I$ mit $2^{-j} \in U_{\iota_j}$, $j = 1, \ldots, m$. Dann ist

$$Z \subset U_{\iota_0} \cup U_{\iota_1} \cup \ldots \cup U_{\iota_m} .$$

Kommentar: Der Satz 24.16 gilt auch für kompakte Mengen, wie ganz leicht zu sehen ist. Direkter Beweis (ohne Verwendung des nachfolgenden Resultats)!

(24.19) Satz: *Die kompakten Teilmengen eines metrischen Raumes sind genau die folgenkompakten Teilmengen.*

Zum Beweis zwei Lemmata:

(24.20) Lemma: *Eine folgenkompakte Teilmenge K eines metrischen Raumes ist* total beschränkt*, das heißt, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele $x_i \in K$, $i = 1, 2, \ldots, m$, mit $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon)$ gibt.*

(24.21) Lemma: *Für eine folgenkompakte Teilmenge K eines metrischen Raumes gilt: Zu jeder offenen Überdeckung (U_ι) gibt es eine Zahl $\eta > 0$ (die* Lebesgue-Zahl*), so dass es zu jedem $x \in K$ ein $\iota \in I$ mit $B(x, \eta) \subset U_\iota$ gibt.*

(24.22) Satz: *Alle Normen auf endlichdimensionalem $\mathbb{K}$-Vektorraum liefern dieselbe Topologie*.

(24.23) Definition: (Nachtrag zu MIA) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und sei (f_k) eine Folge von Funktionen $f_k : D \to \mathbb{R}$.

1° (f_k) heißt punktweise konvergent, wenn für alle $t \in D$ die Folge $(f_k(t))$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Also mit $f(t) := \lim f_k(t)$:

$$\forall\, t \in D\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N}_{n_0} : |f_k(t) - f(t)| < \varepsilon\,.$$

2° (f_k) konvergiert gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt, so dass für alle $k \in \mathbb{N}_{n_0}$ und alle $t \in D$ gilt $|f_k(t) - f(t)| < \varepsilon$. Also:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N}_{n_0}\ \forall\, t \in D : |f_k(t) - f(t)| < \varepsilon\,.$$

Aus MIA bekanntes Beispiel: Für eine konvergente Potenzreihe $f = \sum a_n T^n$ konvergiert die Folge $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ von Polynomen auf jedem Intervall $[-r, r]$ (bzw. auf jeder Kreisscheibe $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq r\}$), $0 < r < \rho_f$ (= Konvergenzradius von f), gleichmäßig gegen den Summenwert $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

(24.24) Definition: Für eine Folge (f_k) von Abbildungen $f_k : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen X, Y und $f : X \to Y$ ist

1° (f_k) *punktweise konvergent gegen* f, wenn für alle $x \in X$ die Folge $(f_k(x))$ in Y konvergiert, also

$$\forall\, x \in X\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N}_{n_0} : d\,(f_k(x), f(x)) < \varepsilon\,.$$

2° (f_k) *gleichmäßig konvergent gegen* f, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gleichmäßig für alle $x \in X$ und für alle $k > n_0$ stets $d(f_k(x), f(x)) < \varepsilon$ gilt.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N}_{n_0}\ \forall\, x \in X : d\,(f_k(x), f(x)) < \varepsilon\,.$$

3° (f_k) *gleichmäßig konvergent gegen* f *auf der Teilmenge* $Z \subset X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gleichmäßig für alle $z \in Z$ und für alle $k > n_0$ stets $d(f_k(z), f(z)) < \varepsilon$ gilt.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N}_{n_0}\ \forall\, z \in Z : d\,(f_k(z), f(z)) < \varepsilon\,.$$

Gleichmäßige Konvergenz hat auch die folgende Formulierung:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N}_{n_0}\ : \sup\{d\,(f_k(x), f(x))\ :\ x \in X\} < \varepsilon\,.$$

Wenn Y also ein normierter Raum ist und $d(y, y') = \|y - y'\|$ die zugehörige Metrik, so erhält man die folgende Form für die gleichmäßige Konvergenz

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N}_{n_0}\ : \|f_k - f\|_\infty < \varepsilon\,.$$

(24.25) Satz: *Der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge von stetigen Abbildungen ist stetig.*

Damit ist jetzt der Nachtrag zu 24.11.4° erfolgt und die Lücke zur Vorlesung MIA geschlossen.

18.05.2007

Der Rest des Paragraphen wurde aus Zeitmangel nicht vorgetragen.

(24.26) Folgerungen:

1° *Für X kompakt und E Banachraum ist der Raum $\mathcal{C}(X,E)$ der stetigen Abbildungen von X nach E mit der Supremumsnorm ein Banachraum.*

2° *Eine Folge (f_n) von stetigen Abbildungen $f_n : X \to Y$ heißt* kompakt konvergent, *wenn sie auf allen kompakten Teilmengen $K \subset X$ gleichmäßig konvergiert. Eine kompakt konvergente Folge von stetigen Abbildungen hat eine stetige Abbildung als Grenzwert.*

Beispielsweise hat man kompakte Konvergenz im vollen offenen Konvergenzintervall (-kreis) bei konvergenten Potenzreihen. Insbesondere hat man kompakte Konvergenz im Falle

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} \longrightarrow e^x .$$

(24.27) Satz: *Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er totalbeschränkt und vollständig ist.*

(24.28) Satz: (Fixpunktsatz von Banach) *Für einen vollständigen metrischen Raum X mit $X \neq \emptyset$ sei $\Phi : X \to X$ eine kontrahierende Abbildung, das heißt, es gibt $L \in \,]0,1[$, so dass für alle $x, x' \in X$ stets*

$$d(\Phi(x), \Phi(x')) \leq L d(x, x')$$

gilt. Dann hat Φ einen Fixpunkt $\xi \in X$, das heißt, es gilt $\Phi(\xi) = \xi$. Der Fixpunkt kann folgendermaßen gewonnen werden: Zu jedem Startpunkt $x_0 \in X$ sei die Folge (x_n) rekursiv durch $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ definiert. Dann ist

$$\xi = \lim x_n .$$

Beispiel: Newtonverfahren